

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN – HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Để kiểm tra số nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m , ta xét 2 trường hợp:

a) Nếu $a = 0$ khi đó ta tìm được một vài giá trị nào đó của m , thay giá trị đó vào (1). Phương trình (1) trở thành phương trình bậc nhất nên có thể:

- Có một nghiệm duy nhất - hoặc vô nghiệm - hoặc vô số nghiệm

b) Nếu $a \neq 0$. Lập biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$

* $\Delta < 0$: thì phương trình (1) vô nghiệm

* $\Delta = 0$: phương trình (1) có nghiệm kép $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$

* $\Delta > 0$: phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Lưu ý: Nếu a, c trái dấu thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2. Định lý Vi-ét.

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Đảo lại: Nếu có hai số x_1, x_2 mà $x_1 + x_2 = S$ và $x_1 x_2 = p$ thì hai số đó là nghiệm (nếu có) của phương trình bậc 2: $x^2 - Sx + P = 0$

3. Dấu của nghiệm số của phương trình bậc hai.

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Ta có các kết quả sau:

+ x_1 và x_2 trái dấu ($x_1 < 0 < x_2$) $\Leftrightarrow p < 0$

+ Hai nghiệm cùng dương ($x_1 > 0$ và $x_2 > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ p > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

+ Hai nghiệm cùng âm ($x_1 < 0$ và $x_2 < 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ p > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

+ Một nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương ($x_2 > x_1 = 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ p = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

+ Một nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm âm ($x_1 < x_2 = 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ p = 0 \\ S < 0 \end{cases}$

4. Vài bài toán ứng dụng định lý Vi-ét

a) Tính nhẩm nghiệm.

Xét phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

+ Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

+ Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$

+ Nếu $x_1 + x_2 = m + n$, $x_1 x_2 = mn$ và $\Delta \geq 0$ thì phương trình có nghiệm:

$$x_1 = m, x_2 = n \text{ hoặc } x_1 = n, x_2 = m$$

b) Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm x_1, x_2 của nó

Cách làm: - Lập tổng $S = x_1 + x_2$

- Lập tích $P = x_1 x_2$

- Phương trình cần tìm là: $x^2 - Sx + P = 0$

c) Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc 2 có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện cho trước. (Các điều kiện cho trước thường gặp và cách biến đổi):

*) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2p$

*) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = S^2 - 4p$

*) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3Sp$

*) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$

*) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{p}$

*) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2p}{p}$

*) $(x_1 - a)(x_2 - a) = x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 = p - aS + a^2$

*) $\frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{x_2 - a} = \frac{x_1 + x_2 - 2a}{(x_1 - a)(x_2 - a)} = \frac{S - 2a}{p - aS + a^2}$

(**Chú ý**: các giá trị của tham số rút ra từ điều kiện cho trước phải thỏa mãn điều kiện $\Delta \geq 0$)

d) Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có một nghiệm $x = x_1$ cho trước.

Tìm nghiệm thứ 2

Cách giải:

* **Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $x = x_1$ cho trước có hai cách làm**

+) **Cách 1:**

- Lập điều kiện để phương trình bậc 2 đã cho có 2 nghiệm: $\Delta \geq 0$ (*)

- Thay $x = x_1$ vào phương trình đã cho, tìm được giá trị của tham số

- Đối chiếu giá trị vừa tìm được của tham số với điều kiện (*) để kết luận

+) **Cách 2:**

- Không cần lập điều kiện $\Delta \geq 0$ mà ta thay luôn $x = x_1$ vào phương trình đã cho, tìm được giá trị của tham số

- Sau đó thay giá trị tìm được của tham số vào phương trình và giải phương trình

Chú ý: Nếu sau khi thay giá trị của tham số vào phương trình đã cho mà phương trình bậc hai này có $\Delta < 0$ thì kết luận không có giá trị nào của tham số để phương trình có nghiệm x_1 cho trước.

* **Để tìm nghiệm thứ 2 ta có 3 cách làm**

+) **Cách 1:** Thay giá trị của tham số tìm được vào phương trình rồi giải phương trình (như cách 2 trình bày ở trên)

+) **Cách 2:** Thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tổng 2 nghiệm sẽ tìm được nghiệm thứ 2

+) **Cách 3:** thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tích hai nghiệm, từ đó tìm được nghiệm thứ 2.